SPERANŢE RÂMNICENE – ediţia a XVII-a

In memoriam Constantin Rusu

11 mai 2019

Clasa a V-a

Problema 1

Determinați toate perechile (a,b) de numere naturale cu proprietatea că:

$$2^{a+1}\cdot 5^{a}=(3b+1)(3b+2).$$

D. M. Bătinețu Giurgiu, București
Neculai Stanciu, Buzău

Problema 2

Să se afle restul împărțirii numărului $1^{2019}+2^{2019}+3^{2019}+...+2019^{2019}$ la 30.

Costică Ambrinoc, Rm. Sărat

Problema 3

Un număr se numește primial dacă este format din cifre prime, distincte.

a) Câte numere primiale de trei cifre există?
b) Arătați că suma tuturor numerelor primiale nu este pătrat perfect.

E:15344 G.M. 4/2018
Teodora Zetea și Bogdan Zetea, Sighetu Marmației

Timp de lucru 2 ore. Fiecare problema se notează cu 7 puncte.

SPERANŢE RÂMNICENE – ediţia a XVII-a

In memoriam Constantin Rusu

11 mai 2019

Clasa a VI-a

Problema 1

Se considera triunghiul ABC oarecare, cu $\hat{A} = 60^\circ$. Bisectoarele unghiurile B și C care se intersectează în punctul I, intersectează laturile AC și AB în punctele N și respectiv M . Perpendiculara din C pe dreapta NM intersectează dreapta BN în P . Arătați că triunghiul CIP este echilateral.

Dragoș Lăzărescu, Râmnicu Sărat

Problema 2

Fie $n, m \in N^*$.Să se arate că $2^n + 7^m$ este divizibil cu 5 dacă și numai dacă $3^n + 8^m$ este divizibil cu 5.

Ovidiu Țâțan, Râmnicu Sărat

Problema 3

Numărul 2^n are 90 de cifre. Arătați că una dintre cifre se repetă de cel puțin 10 ori.

E:15251 G.M. 10/2017
Daniel Stretcu, Drobeta Turnu-Severin

Timp de lucru 2 ore. Fiecare problema se notează cu 7 puncte.

SPERANŢE RÂMNICENE –ediţia a XVII-a
In memoriam Constantin Rusu
11 mai 2019

Clasa a VII-a

Problema 1

O coală de hârtie dreptunghiulară cu dimensiunile L și l se îndoaie o singură dată astfel încât două colțuri opuse să se suprapună.
Calculați lungimea îndoiturii.

D. M. Bătinețu Giurgiu, București
Neculai Stanciu, Buzău

Problema 2

Comparaţi numerele:

$A=\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{2}{3\cdot 4}+\frac{3}{4\cdot 5}+...+\frac{2018}{2019\cdot 2020}$ și

$B=\frac{1}{2}\left(1+\frac{2}{1+2}+\frac{3}{1+2+3}+...+\frac{2018}{1+2+3+...+2018}\right)-\frac{1009}{1010}$.

Florin Antohe, Galați

Problema 3

Un pătrat perfect se numește răsturnabil dacă are ultima cifră nenulă și răsturnatul său este pătratul răsturnatului rădăcinii lui pătrate(144 este răsturnabil pentru că $441=21^2$ și $12=\sqrt{144}$).

a) Aflați pătratele răsturnabile de trei cifre;
b) Arătați că există o infinitate de pătrate răsturnabile:

E:15350 Gazeta Matematică Nr.4/2018

Elefterie Petrescu, București

Timp de lucru 2 ore.Fiecare problema se noteaza cu 7 puncte.

SPERANŢE RÂMNICENE – ediţia a XVII-a

In memoriam Constantin Rusu

11 mai 2019

Clasa a VIII-a

Problema 1

Fie a,b și c trei drepte concurente incluse în planul α și $O=a\cap b\cap c$. Prin O trece o dreaptă m care formează, de aceeași parte a planului α, unghiuri congruente cu a și b și c. Să se demonstreze că $m\perp\alpha$.

Constantin Apostol, Râmnicu Sărat

Problema 2

Să se arate că $3^{5^{2019}}+1$ și $3^{5^{2020}}+10$ sunt prime între ele.

Costin Negrii, București

Problema 3

Determinați funcția $f:R\to R$ știind că

$$3f(x)+2=2f([x])+2f(\{x\})+5x,$$

pentru orice număr real x. Am notat cu $[x]$ și $\{x\}$ partea întreagă, respectiv partea fracționară a numărului x.

E:15499 G.M. 2/2019
Mihaela Berindeanu, București

Timp de lucru 2 ore. Fiecare problema se notează cu 7 puncte.

SPERANŢE RÂMNICENE – ediţia a XVII-a
In memoriam Constantin Rusu
11 mai 2019
Clasa a IX-a

Problema 1

Fie $a,b,c \in (0,\infty)$. Să se arate că:

$$\frac{a^4}{(a+b)(a^2+b^2)}+\frac{b^4}{(b+c)(b^2+c^2)}+\frac{c^4}{(c+a)(c^2+a^2)} \geq \frac{a+b+c}{4}$$

Costică Ambrinoc, Rm. Sărat

Problema 2

Fie triunghiul ABC si P, Q, respective R punctele de intersecție ale medianelor AD, BE, respectiv CF ale triunghiului cu cercul circumscris triunghiului ABC . Să se arate că dacă $\overrightarrow{DP}+\overrightarrow{EQ}+\overrightarrow{FR}=\vec{0}$ atunci triunghiul ABC este echilateral

Dragoș Lăzărescu, Râmnicu Sărat

Problema 3

a) Fie n un număr natural nenul. Comparați numerele: $\left\{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right\}$ și $\left\{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}\right\}$
b) Să se arate că există numerele naturale nenule distincte a și b astfel încât $\left\{\sqrt{a}-\sqrt{b}\right\}=\left\{\sqrt{b}-\sqrt{a}\right\}$

E:27504 G.M. 3/2018
Traian Preda, București

Timp de lucru 2 ore.Fiecare problema se noteaza cu 7 puncte

SPERANŢE RÂMNICENE – ediţia a XVII-a
In memoriam Constantin Rusu
11 mai 2019
Clasa a X-a

Problema 1

Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația:

$$\sqrt[3]{x^2-3x+4}+\sqrt[3]{-2x+2}+\sqrt[3]{-x^2+5x+2}=2.$$

Ovidiu Țâțan, Râmnicu Sărat

Problema 2

Fie $z_1, z_2, z_3 \in C$ astfel încât $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$ și $z_1^2+z_2^2+z_3^2=0$.
Să se calculeze $|z_1^{2019}+z_2^{2019}+z_3^{2019}|$.

Costică Ambrinoc, Râmnicu Sărat

Problema 3

Să se calculeze partea întreagă a numărului $\log_3 5+\log_5 7+\log_7 3$.

E:27535 GM5/2018
Petre Rău, Galați

Timp de lucru 2 ore.Fiecare problema se noteaza cu 7 puncte.

SPERANŢE RÂMNICENE – ediţia a XVII-a
In memoriam Constantin Rusu
11 mai 2019
Clasa a XI-a

Problema 1

Să se calculeze limita:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[2!]{1+\sin 2x}+\sqrt[3!]{1+\sin 3x}+\ldots+\sqrt[(n+1)!]{1+\sin(n+1)x}+x-n}{x}\right)$$

Constantin Rusu, Rm. Sărat

Problema 2

Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to R, f(x)=\frac{2}{\sqrt{x}}$. Definim distanța de la un punct A la gaficul funcției f notat cu G_f, astfel: $d(A,G_f)=\min_{M\in G_f}\{AM\}$.

Calculați această distanță dacă $A(-1,0)$.

Constantin Rusu, Rm. Sărat
Mihai Neagu, Rm. Sărat

Problema 3

Fie matricele $A,B\in M_2(R)$ astfel încât $AB=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$. Să se calculeze $((BA+(BA)^{-1})^{2019}$.

E:27651 GM2/2019
Dan Nedeianu, Drobeta-Turnu Severin

Timp de lucru 2 ore.Fiecare problema se noteaza cu 7 puncte.

SPERANŢE RÂMNICENE – ediţia a XVII-a

In memoriam Constantin Rusu

11 mai 2019

Clasa a XII-a

Problema 1

Calculați:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k+\sqrt{n^2+nk}}$$

D. M. Bătinețu Giurgiu, București
Neculai Stanciu, Buzău

Problema 2

Să se calculeze integrala: $\int_1^4 \frac{\ln x}{x^2+5x+4}dx$.

Ovidiu Țâțan, Râmnicu Sărat

Problema 3

Fie P(X),Q(X) polinoame neconstante cu coeficienți complecși, polinomul P(X) având rădăcinile simple și să notăm cu A mulțimea rădăcinilor lui P(X). Să se demonstreze că următoarele afirmații sunt echivalente:

i) P(X) divide P(Q(X));

ii) Q(A) este inclusă în A.

Marcel Țena, București

Timp de lucru 2 ore.Fiecare problema se noteaza cu 7 puncte.